

Mathematik und Natur

RALF WILHELM MUNO

Einleitung

PLURALE 2
(2003), 109-126

Die Mathematik hat Schwierigkeiten unter den Wissenschaften ihren Platz zu finden. Sie dient den Naturwissenschaften, indem sie formale Zusammenhänge zwischen den Naturobjekten beschreibt. Sie kann den Naturwissenschaften zugeschlagen werden, allerdings werden keine Experimente gemacht. Mathematik ist nicht messbar. Sie ist exakt. Man kann also keine Theorien im engeren Sinne bilden. Modelle für mathematische Zusammenhänge existieren lediglich innermathematisch und sind selbst wieder Mathematik. Diese Kulturtechnik wird lediglich mit dem menschlichen Geist ausgeübt und erforscht und besitzt deshalb Eigenschaften einer Geisteswissenschaft. Die Logik als Überlappung zwischen Philosophie und Mathematik spricht ebenfalls dafür.

Diese Abhandlung untersucht, wie sich Mathematik zur Natur verhält. Mathematik dient zur Beschreibung der Natur und geht über sie hinaus. Diese Charakterisierung ist nicht erschöpfend, daher werden hier tieferliegende Aspekte erörtert. In den folgenden drei Abschnitten kommen zunächst historische Quellen zu Wort, namentlich Platon im *Timaios*-Dialog, die Auffassung und das Werk Galileo Galileis und die Kant'sche Naturauffassung in den Werken *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* und *Kritik der reinen Vernunft*. Der vierte Abschnitt fasst die Ergebnisse zusammen. In den folgenden Abschnitten wird erforscht, inwieweit moderne Mathematik wie Chaosforschung und der Gödel'sche Unvollständigkeitssatz das Verständnis der Natur

verändert haben und inwieweit sie einen Fingerzeig auf die Möglichkeit der Erkenntnis liefern.

Platons *Timaios*

Platons Philosophie ist in Dialogen überliefert, in denen sein Lehrer Sokrates mittels seiner Fragetechnik die Wahrheit aus den Dialogpartnern herausfragte. Sokrates nahm an, die Seele jedes Menschen hätte schon die Wahrheit geschaut und sie lediglich vergessen. Seine Aufgabe besteht darin, durch Fragen die Erinnerung an die Wahrheit zu wecken und herauszuarbeiten. Der *Timaios*-Dialog¹ enthält viele von Platons Kerngedanken zur Beziehung von Mathematik und Natur. Diese Darstellung ist so kraftvoll, dass sie bis heute das naturwissenschaftliche Weltbild beeinflusst. Im Folgenden sollen einige Thesen des Dialogs vorgestellt werden, wobei ich mich auf die Veröffentlichungen von Gadamer² und Schäfer³ stütze.

¹ Platon 347 v.
Chr.

² Gadamer 1974

³ Schäfer 1985

Platon trennt seine Weltvorstellung scharf in eine Welt aus Ideen und eine der Veränderlichkeit unterworfenen Welt sinnlicher Wahrnehmung. Die Welt der Ideen besteht aus idealen Objekten und ist real existent, nicht lediglich eine Abstraktion des Denkens. Die Welt der Wahrnehmung besteht aus alltäglichen Dingen, die Ideen repräsentieren, die Idee enthalten oder geschaut haben, jedoch nicht die Idee selber sind. Beispielsweise ist die Idee von einem Kreis noch nie an eine Schultafel gezeichnet worden, da der Kreidestrich immer eine gewisse Dicke besitzt und die Randpunkte nicht alle denselben Abstand vom Mittelpunkt aufweisen, wie es der Idee nach sein sollte. Die Idee ist die Abstraktion aller Objekte mit Konzentration auf gewisse Eigenschaften. Dieses Denken entspricht dem Denken der Mathematiker: Sie versuchen Objekte auf das Wesentliche zurückzuführen, sie versuchen die Idee zu erkennen und zu begreifen. Das Ziel dieses Erkenntnisprozesses ist, neue und wenig offensichtliche Aussagen über diese Ideen mittels logischer Schlussfolgerung zu treffen. Nach platonischer Vorstellung sind diese Schlussfolgerungen unmittelbar in der Wahrnehmungswelt gültig, da sie nur die Darstellung, ein Abbild der Ideenwelt ist. Der Nobelpreisträger Werner Heisenberg (1901-1976) sah diese Idee in der Darstellungstheorie von Gruppen verwirklicht. Sind G und H Gruppen, so ist jeder Homomorphismus

$\phi : G \rightarrow H$ eine Darstellung der Gruppe G in H . Die Gruppe G der *Ideen* wird auf die Gruppe H der *Schatten* geworfen. In der Elementarteilchenphysik interpretiert man solche Darstellungen als Elementarteilchen. Die Teilchen unserer Welt sind lediglich Ausfluss der Ideenwelt einer abstrakten Gruppe. Durch die Darstellung übertragen sich gewisse Eigenschaften der Gruppe G auf die Gruppe H . Nehmen wir an, G ist kommutativ, d.h. für alle Elemente $a, b \in G$ gilt $ab = ba$, dann überträgt sich dies auf die Gruppe H : $\phi(a)\phi(b) = \phi(b)\phi(a)$. Ein weiteres Beispiel ist die objektorientierte Programmierung. Klassen werden durch Eigenschaften vereinbart, die Objekte einer Klasse sind die Instanzen, also konkrete Ausgestaltungen der Klassen.

Überhaupt wird bei Platon das Wissbare mit der Mathematik identifiziert. Die Natur ist wissbar und erkennbar, da sie mathematisch gestaltet ist. Diese Vorstellung bringt den Moment der Kognition, der inneren Geistestätigkeit, mit dem Außen der Natur zusammen. Die menschlichen Vorstellungen von Rationalität und Logik gehen mit den Gesetzen der Natur Hand in Hand.

Bemerkenswert ist Platons Erklärung der Schöpfung und die Stellung Gottes. Das Weltall besteht aus Chaos, das immer war und immer da sein wird. Dies unterscheidet sich von der biblischen Weltanschauung, wo das Weltall mit der Erschaffung durch Gott entstand und irgendwann ein Ende finden wird. In Platons Überlegung hat das Weltall keinen Anfang und kein Ende, sondern war immer da. Die schöpferische Kraft des göttlichen Wesens (Demiurg), beschränkt sich auf die Erschaffung von Ordnung aus Chaos. Diese Vorstellung hat Naturwissenschaftler geprägt. Sie glauben an eine Weltordnung, ohne diese wirklich erkennen zu können. Die Ordnung erscheint uns in den Naturgesetzen in der sinnlichen Welt und in mathematischen Theoremen in der Ideenwelt. Kant hat später diese Idee aufgegriffen und zu synthetischen Urteilen a priori über die Natur weiterentwickelt. Diesen Gesichtspunkt werde ich im Kapitel über Immanuel Kant erörtern.

Zur Natur und Mathematik tritt der Aspekt der Ästhetik. Für Platon ist alles schön, was ideal ist. Ideales ließe sich nur mittels Mathematik beschreiben. Das Ideal der geometrischen Form, das im *Timaios*-Dialog auftritt, sind die fünf Platonischen Körper: Tetraeder, Hexaeder,

Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Das sind gerade die Polyeder, bei denen alle Flächen kongruente regelmäßige Vielecke sind. Diese Vielecke sind aus Dreiecken zusammengesetzt, die Platon als Grundformen ansieht.

Methoden zur Falsifizierung der Erkenntnisse, etwa in Form von (Gedanken-)Experimenten sind nicht vorhanden. Die Natur wird an Hand von Beispielen untersucht. Überhaupt sind Platons Betrachtungen naturphilosophisch, von wissenschaftlicher Methodik ist wenig vorhanden. Diese Systematik führte erst Galileo Galilei ein.

Galileo Galilei (1564-1642)

Platons Ideenlehre wurde von Aristoteles aufgegriffen und weiterentwickelt, und erst darauf entwickelte sich aus dem aristotelischen heliozentrischen Weltbild die Vorstellung, die Erde stehe im Mittelpunkt der Welt. Letzteres wurde von Kopernikus widerlegt, aber erst Galileo Galilei fand mit dem Fernrohr einen Hinweis auf die Korrektheit des heliozentrischen Systems. Genauer gesagt, vereinfacht sich die Mathematik. Die komplizierte Epizykeltheorie kann zu Gunsten von Ellipsen, Kreisen und Hyperbeln aufgegeben werden, falls man als festen Bezugspunkt die Sonne wählt. Der berühmte Konflikt mit Kirche und Inquisition folgte, als Galilei nach hartem Kampf schließlich widerrief.

⁴ Brecht 1997 Bei Bertolt Brecht⁴ flüstert Galilei nach dem Prozess »Und sie [die Erde; Anmerk. d. Verf.] bewegt sich doch.«

Galileis Leistung besteht in der Quantifizierung der Natur. Sie ist wäg- und messbar, sie kann durch Maßzahl und Einheiten ausgedrückt werden. In seinen Hauptwerken *Dialogo* und *Discorsi* erfindet Galilei auch das Gedankenexperiment. Bis dahin galt die Auffassung, dass schwere Körper schneller fallen als leichte. Galilei stellte dazu folgende Überlegung an: Angenommen, man habe eine schwerere und eine leichtere Masse, dann fällt die schwerere Masse schneller als die leichtere. Verbindet man beide, müsste sich ein Mittelwert aus beiden Fallgeschwindigkeiten ergeben. Das ist ein Widerspruch, beide Massen zusammengefasst formen eine noch schwerere Masse als die schwerste Einzelmasse, die schneller als jede Einzelmasse fallen müsste. Von Galilei stammt der viel zitierte Ausspruch »Die Natur spricht die Sprache der Mathematik: die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke,

Kreise und andere mathematische Figuren«, genauer steht geschrieben in *Il saggiaiore* (Die Goldwaage) geschrieben:

Die Philosophie steht in jenem großen Buch geschrieben, das uns ständig offen vor Augen liegt (ich spreche vom Universum). Aber dieses Buch ist nicht zu verstehen, ehe man nicht gelernt hat, die Sprache zu verstehen, und die Buchstaben kennt, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren. Ohne diese Mittel ist es dem Menschen unmöglich, ein einziges Wort davon zu verstehen; ohne sie ist es ein vergebliches Umherirren in einem dunklen Labyrinth.⁵

⁵ Galilei 1623

Formeln sind in Galileis Werken selten.

Zu seinem Verdienst zählt die Trennung von Religiosität und Naturerkenntnis. Er vertrat die These der Autonomie der Naturerkenntnis. Um Natur zu erkennen, braucht es keinen Gott: Kausalität tritt an Stelle des göttlichen Tuns. Die unendliche Natur wird Gegenstand der Wissenschaft und ist nicht länger Gegenstand naturphilosophischer Mutmaßungen und scholastischer Konstruktionen. Galilei richtete sich gegen die Scholastiker damaliger Zeit und begriff Wissenschaft als einen Prozess und nicht als eine Menge endgültiger Dogmen. Wir verdanken ihm eine Systematik in der Naturwissenschaft. Galilei war der erste, der durch Reduktion der Probleme, durch hypothetisch-deduktive Rückschlüsse Wissenschaft betrieb. Wahrheit wird nicht aus Prinzipientreue, sondern durch der Richtigkeit der Folgerungen gewonnen.⁶ Überhaupt stand bei Galilei das Experiment im Vordergrund. Zunächst liefern Experimente Datenmaterial für eine Hypothese, welche durch induktives Schließen gewonnen wird. Der vermutete Zusammenhang dient zur Vorhersage von Naturerscheinungen, die wieder durch Experimente verifiziert werden. Kernpunkt eines Experimentes ist die Wiederholbarkeit. In der Quantenmechanik stößt man mit dieser Forderung auf Grenzen, was ich im Abschnitt über Erkenntnismethoden beschreiben werde.

⁶ Schmutzer;
Schütz 1976

Immanuel Kant (1724-1804)

Kant strengt eine Rekonstruktion des wissenschaftlichen Naturbegriffes an. Die Natur ist für ihn die Summe der Dinge, von der wir eine äußere Erfahrung haben können. Erfahrung aber ist nur durch menschliche

Leistung, durch synthetisches Handeln zu gewinnen. Die Natur wird durch die menschliche Erfahrung moduliert. Kant geht einen Schritt weiter und fragt, was a priori allein aus der Vernunft heraus erkennbar ist. Die nennt er die Metaphysik der Natur.

Kant beschäftigt sich in seiner Abhandlung *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* mit dem naturwissenschaftlichen Erkenntnisprozess. Er stellt die Frage, wie man aus empirischen Daten Naturgesetze ableiten kann.

Natur ist für Kant der Inbegriff aller Gegenstände, von denen wir eine äußere Erfahrung haben können. Alles ist Natur, was tast-, fühl-, hör-, schmeck-, seh-, riechbar ist und mittels geeigneter Transformationen diesen Sinneseindrücken untergeordnet werden kann. Weit entfernte Sterne sind zwar nicht mit bloßem Auge erkennbar, aber mit dem Teleskop können wir einen Sinneseindruck gewinnen. Messungen eines Kernspintomografen werden wahrnehmbar durch Visualisierung mittels eines Computers. Mathematik gehört demnach nicht zur Natur, mathematische Relationen sind nicht mit den Sinnen erfahrbare. Göttliches Wirken ist nicht erfahrbare, deshalb von den Naturwissenschaften nicht entscheidbar und erfassbar.

Erfahrung geht aus synthetischem Handeln des Menschen hervor, sie Erfahrungen geschehen nicht, sondern werden vom Menschen gemacht. Die Erfahrung ist somit an menschliche Leistung gekoppelt, wie etwa Experimente. Also wird die Natur, so wie wir sie wahrnehmen, durch Leistung des Menschen bestimmt.

Kants Metaphysik der Natur will apriorisches Wissen aus reiner Vernunft von der Natur der körperlichen Dinge sein. Apriorisches Wissen ist das Wissen vom unbedingten Zusammenhang der letzten Ganzheit des Sachfeldes der materiellen sinnlichen Dinge.⁷ Mit anderen Worten ist das apriorische Wissen die Lehre von dem Denknötwendigen (Logik), dem erfahrbare Dinge unterworfen sind. Physiker vertrauen auf Meta-Naturgesetzmäßigkeiten: Naturkonstanten ändern sich nicht mit der Zeit, Experimente sind wiederholbar, kleine Abweichungen in den Voraussetzungen produzieren kleine Abweichungen im Ergebnis. In der Metaphysik der Natur muss dieses Wissen eine Explikation erfahren, wie sie in der *Kritik der reinen Vernunft* fundiert ist.

⁷ Schäfer 1985

Völlig ohne empirischen Kristallisationspunkt kommt auch die Kantsche Lehre nicht aus. Dies ist die Materie (die frei im Raum beweglich ist). Die in der *Kritik der Reinen Vernunft* entwickelten Kategorien Quantität, Qualität, Relation und Modalität charakterisieren Materie. Dies ist ein synthetisches Urteil a priori im Sinne von Kant. Der Nutzen dieses Urteils liegt in der Erkenntnis, dass Mathematik als Größenbestimmung angewandt wird. Dies nennt Kant den »transzendenten Grundsatz der Mathematik der Erscheinungen«⁸ und weiter »Er ist es allein, welcher die reine Mathematik in ihrer ganzen Präzision auf Gegenstände der Erfahrung anwendbar macht.«⁹ Kant hat damit die reine Mathematik auf die empirische Natur anwendbar gemacht. Der Grundsatz führt zur Mathematisierung der ganzen Naturwissenschaft.

⁸ Kant 1977a, 207
⁹ Kant 1977a, 207

Vergleich Platon, Galilei und Kant

Platon trennt zwei Welten, die der Ideen (Mathematik) und die wahrnehmbare Welt, die Natur. Sowohl Galilei als auch Kant sehen in der Mathematik nur ein Hilfsmittel zur Naturerkenntnis.

Bei Platon wird das Wissbare und Erkennbare mit der Mathematik gleichgesetzt, bei Galilei ist sie eine Sprache, also Mittel zum Zweck. Kant sieht in der Mathematik einen Hilfsstoff, eine Bedingung a priori, die Naturerkenntnis ermöglicht. Überhaupt stellt sich die Frage, wie Naturerkenntnisse gewonnen werden.

Erkenntnismethoden

Es gibt zwei Erkenntnismethoden, die sich gegenseitig diametral gegenüberstehen. Die Deduktion setzt Grundannahmen, die Axiome, als gegeben, als wahr voraus. Diese Axiome sind nicht beweisbar, sondern dienen als Kristallisationspunkt weiterer Überlegungen. Die Schlussfolgerung erfolgt durch das Schließen vom Allgemeinen auf das Besondere. Die Induktion hingegen schließt vom Speziellen auf eine allgemeine Regel.

Setzt man beispielsweise die Aussage »Alle Raben sind schwarz« als wahr voraus, wird jeder (spezielle) Rabe unseres logischen Systems von schwarzer Farbe sein. Die allgemeine Regel manifestiert sich stets im speziellen Objekt. Diese Art der Schlussfolgerung ist logisch korrekt,

besitzt aber heuristische Schwachstellen. Die Axiome sind nicht verifizierbar, sondern müssen als wahr angenommen werden. Sie können nicht bewiesen werden. Sie bleiben solange wahr, bis ein Gegenbeispiel gefunden wird. Deduktion setzt Akzeptanz für die Regeln voraus. Solange ist die allgemeine Regel gültig, wie sie nicht widerlegt ist. Prinzipiell ist der pessimistischere Standpunkt ebenso vertretbar, nämlich zu glauben, alles ist falsch, bis es bewiesen ist. Dieser Vertrauensvorschuss ist heuristisch gerechtfertigt, ansonsten gäbe es keine Folgerung. Ein weiteres Problem ist, dass die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems bewiesen werden muss. Wären unsere Axiome »Alle Raben sind schwarz« und »Alle Raben sind nicht schwarz«, so wäre dies ein Widerspruch, da Raben nicht gleichzeitig schwarz und nicht schwarz sein können. Würde man trotzdem einen deduktiven Schluss wagen, so könnte man Beliebiges folgern, *e falso quod libet* (aus Falschem folgt Beliebiges).

Wäre das Axiomensystem »Alle Raben sind schwarz« und »Alle Raben sind grün« widerspruchsfrei? Man könnte einwenden, dass ein Rabe nicht gleichzeitig grün und schwarz sein kann. Das ist nicht wahr, freilich können Vögel auch bunt sein. Trotzdem möchte man gerne noch die Regel »Jeder Rabe darf nur eine Farbe besitzen« hinzuziehen. Man erkennt an diesem trivialen Beispiel bereits die praktischen Schwierigkeiten beim Aufstellen der Axiomensysteme. Streng genommen ist jede Folgerung aus dem Axiomensystem tautologisch. Sobald das Axiom vorhanden ist, müssen denknotwendig alle deduktiven Folgerungen gelten. Der Erkenntnisprozess besteht lediglich darin, bestehende Wahrheiten zu entdecken. Nur mittels Deduktion kann man sich nicht über dieses Folgerungssystem hinausbewegen. Dies ist das Deduktionsparadoxon, nachdem ein deduktiver Schluss nicht gleichzeitig gültig und informativ sein kann. Die Aussage »Alle Raben sind schwarz« sagt nichts darüber aus, ob die Aussage »Alle Blätter sind grün« wahr oder falsch ist. Der Wahrheitswert letzterer Aussage kann nicht allein mit unserer Regel entschieden werden. Hierin äußert sich der Gödel'sche Unvollständigkeitssatz: In jedem logischen System lassen sich Aussagen formulieren, die nicht durch das System entscheidbar sind. Mit anderen Worten können zu jedem logischen System gewisse Aussagen hinzugenommen werden (oder ihr Negat),

so dass das System widerspruchsfrei bleibt. Egal wie umfangreich unser System aus Axiomen ist, immer wird man unbeantwortbare Fragen finden können. Dieses Dilemma lässt sich in der Mathematik durch die Aufspaltung in zwei Theorienzweige überwinden, wobei in einem Zweig die Aussage als richtig, im anderen als wahr angenommen wird, was unbefriedigend ist, da sich beide Theorien widersprechen. Prominentes Beispiel ist die Kontinuumshypothese: Georg Cantor (1845-1918) vermutete keine weitere Mächtigkeit zwischen Abzählbarkeit und der Mächtigkeit der reellen Zahlen. Es wurde gezeigt, dass diese Vermutung unentscheidbar ist und dass sowohl die Annahme, dass die Hypothese richtig als auch dass sie falsch sei, mit den Zermelo-Fraenkel-Axiomen widerspruchsfrei bleibt.

Das Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem besteht aus neun Axiomen, die ich ohne Formeln beschreiben möchte:

- 1) Axiom der Extensionalität: Zwei Mengen, die dieselben Elemente enthalten, sind gleich.
- 2) Axiom der ungeordneten Paare: Zu zwei beliebigen Elementen existiert eine Menge, die nur diese beiden Mengen als Elemente enthält.
- 3) Axiom der Vereinigung: Zu einer Menge von Mengen existiert die Vereinigungsmenge. (Kurz: Beliebige Vereinigungsmengen existieren und sind selber wieder eine Menge).
- 4) Axiom der Potenzmenge: Zu jeder Menge existiert ihre Potenzmenge (das ist die Menge aller Teilmengen).
- 5) Axiom der leeren Menge: Die leere Menge existiert.
- 6) Axiom der Unendlichkeit: Es gibt eine Menge, die alle natürlichen Zahlen enthält.
- 7) Axiom der Teilmenge: Zu einer Menge und einer Vorschrift gibt es eine Teilmenge, deren Elemente alle der Vorschrift genügen.
- 8) Axiom der Ersetzung: Für jede Menge und jede Abbildung dieser Menge existiert die Menge der Bilder.
- 9) Axiom der Regularität: Jede nichtleere Menge ist von einem ihrer Elemente disjunkt.

Das Auswahlaxiom wurde später hinzugefügt. Es existiert eine Menge, die aus einer Menge von nicht leeren Mengen jeweils genau ein Element enthält. Oder anders formuliert. Aus einer Menge nicht-leerer Mengen kann man jeweils ein Element auswählen und diese

Elemente zusammen ergeben ihrerseits wieder eine Menge.

Überträgt man diese Erkenntnis auf die Natur, so ergeben sich zwei Schlussfolgerungen:

1) Es kann mehr erdacht als gewusst werden. Die Natur stellt eine Restriktion des Denkbaren dar, indem man einige unentscheidbare Aussagen mittels Experimenten entscheiden kann. Andererseits gibt es naturwissenschaftliche Sachverhalte, die sich bisher einer mathematischen Beschreibung entziehen. Kognition ist ein Thema, welches mit neuronalen Netzen untersucht wird, die Modelle vermögen freilich nicht zu überzeugen. Überhaupt ist das menschliche Bewusstsein eine Tatsache, der mathematischen Beschreibung jedoch nicht zugänglich.

2) Gehen wir davon aus, dass die Natur selber ein logisches System ist, also die Regeln der Logik beachtet, so wird auch die Menge der Naturgesetze keinen Abschluss finden, da jedes logische System erweiterbar ist. Der Mathematiker Georg Cantor (1845-1918) hatte diesen Satz möglicherweise antizipiert, als er den Ausspruch tat: »Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit.«¹⁰ Die Mathematik bietet kein Werkzeug zur Entscheidung von Unentscheidbarkeiten. Dies kann allein aus Naturbeobachtung gewonnen werden.

¹⁰ Cantor 1883

Die Induktion kann einen Sachverhalt nicht beweisen, außer die vollständige Induktion. Egal, wie viele Beispiele und Experimente mit der gefolgerten allgemeinen Regel übereinstimmen, es kann immer sein, dass das Gegenbeispiel nicht entdeckt wurde, die wissenschaftlichen Methoden nicht weit genug reichen. Eine Grenze wird durch die Unendlichkeit der Natur gesetzt, eine andere durch das Vermögen menschlicher Erkenntnis. Wird ein Gegenbeispiel gefunden, muss streng genommen die allgemeine Regel verworfen und eine allgemeinere Regel gefunden werden. Die alte Regel bezieht ihre Daseinsberechtigung weiterhin aus den sie bestätigenden Experimenten.

Ein Beispiel ist die folgende Formel: n^2+n+11 liefert für $n=1,...,9$ eine Primzahl. Mittels Induktion würde man als allgemeine Regel vermuten, dass sie für alle natürlichen Zahlen eine Primzahl liefert, was nicht der Fall ist. Vollständig ist die Induktion, wenn man den vermuteten Zusammenhang für alle Objekte beweisen kann, für die

der Satz gelten soll. Im Fall einer abzählbaren Menge von Objekten beweist man die Richtigkeit für das n -te Objekt als Spezialfall (Induktionsverankerung) und folgert dann die Aussage: »Falls der Satz für n richtig ist, ist er auch für $n+1$ richtig.« (Induktionsschritt). Damit kann man dann die Korrektheit der Aussagen für alle Zahlen größer als n beweisen. Man starte bei N und führe den Induktionsschritt » $n \rightarrow n+1$ « endlich oft aus, bis die Aussage für alle Elemente der Menge bewiesen ist. Die Stärke der Induktion liegt in ihrem Vermögen, neue Aussagen zu liefern. Es gibt kein Induktionsparadoxon.

Ein Beispiel dafür sind die Newton'sche Mechanik und die Relativitätstheorie. Obwohl die Relativitätstheorie allgemeiner gültig ist als die Newton'sche Theorie, ist in guter Näherung für die Alltagswelt die Newton'sche Mechanik gültig und kann daher nur im puristischen Sinne als falsch bezeichnet werden. Niemand würde für den Bau eines Motors die Allgemeine Relativitätstheorie konsultieren, sondern sich für die Newton'sche Kräftetheorie entscheiden. Die Newton'sche Mechanik ist leichter zu praktizieren.

Überhaupt ist der Begriff »Wahrheit« mit der Natur und der Mathematik eng verbunden. Wenn die Natur nicht wahr ist, haben Nihilisten Recht, dann ist nichts wahr. Die Mathematik hingegen differenziert genauer: Wahrheit muss in Begriffe gefasst werden.

Wir haben bereits Axiome kennen gelernt, also Wahrheiten, die wir akzeptieren, aber nicht beweisen können. Die Wahrheit einer Folgerung wird ohne Beweis nicht akzeptiert, an die Stelle des Begriffs der Wahrheit tritt der der Beweisbarkeit. In der Tat zeigt der Gödel'sche Satz, dass Beweisbarkeit schwächer als Wahrheit ist: Alle beweisbaren Aussagen sind wahr, aber nicht alle wahren Aussagen sind beweisbar. Denn in jedem logischen System gibt es Aussagen, die möglicherweise in unserer Realität wahr sind, aber nicht aus dem bereits Vorhandenen deduziert werden können. Eine artifizellere Unterscheidung ist die in Beweisbarkeit und Berechenbarkeit. Berechenbarkeit heißt, eine (Von-Neumann-)Maschine bauen zu können, die nach endlich vielen Schritten eine Entscheidung über Wahr und Falsch liefern kann. Die Zweckmäßigkeit dieser Unterscheidung liefern Gödels und Turings Arbeiten. Was der Computer nicht begreifen kann, ist die Unendlichkeit. Der umfassendste Begriff ist die Wahrscheinlichkeit. Die Unter-

teilung in wahr und falsch wird durch Unsicherheit ersetzt, für den Wahrheitsgehalt wird eine Maßzahl zwischen 0 und 1 angegeben. Insbesondere für die Quantenmechanik war diese Einordnung der Wahrscheinlichkeit in die Wahrheitsbegriffe ein enormer Schritt: Man ließ die genauen Voraussetzungen und die Folgerungen fallen und setzte an ihre Stelle die Stochastik. Quantenmechanik operiert mit Wahrscheinlichkeiten und Phasen. Die Überlagerung von Phasen, was beispielsweise geschieht, wenn Teilchen wechselwirken, sorgen für Auslöschungen oder Verstärkungen der Wahrscheinlichkeit an den Punkten des Raumes.

Das Experiment ist der Grundpfeiler der modernen Naturwissenschaft seit Galilei. Nur dort ist Platz für exakte Naturwissenschaften, wo Ergebnisse (bis auf Ungenauigkeiten) reproduzierbar sind. Diese Prämisse hat sich als außerordentlich erfolgreich erwiesen. Betrachten wir aber einmal die Möglichkeit, sich nur auf Experimente zu beschränken. Eine Theoriebildung scheidet dann völlig aus, induktives Folgern wäre nicht unmöglich. Es ergäbe sich eine umfassende Kasuistik, deren allgemeinere Prinzipien verborgen blieben. Katastrophal wirkt sich das auf die Anwendung der Experimentenergebnisse aus. Wissenschaft müsste wie eine Bürokratie organisiert sein, in der jeder erdenkliche Fall dokumentiert und durchgemessen würde. Die Quantenmechanik geht einen Schritt weiter: Messung zerstört im Allgemeinen den Systemzustand, Reproduzierbarkeit wird damit prinzipiell unmöglich. Sie ist nicht länger menschliches Unvermögen, sondern logisch unmöglich. Insbesondere würde das Kopieren eines Zustands Messungen erfordern, da man zunächst den Ist-Zustand herausfinden muss. Hier schließt sich eine frappierende Folgerung an: Dieser Ist-Zustand kann, da er durch die Messung zerstört wird, im Allgemeinen niemals gemessen werden. Genauer sollte man sagen, dass man niemals mit Sicherheit das System in dem Zustand hatte, den man gemessen hat. Das Prinzip der Kausalität wird auf eine subtile Weise umgangen, wir können niemals die Kausalität nachprüfen; niemand weiß, ob die Kausalität in der Quantenmechanik ihre Gültigkeit behält, da niemals die Voraussetzungen ermittelt werden können. Der Begriff ist für die Quantenmechanik absurd. Wahrscheinlichkeiten werden zur einzig möglichen Wahrheit, und zwar zur

prinzipiell einzig möglichen Wahrheit. Die Logik, die mit Wahrheitswerten wie »wahr« und »falsch« operiert, muss durch eine Quantenlogik erweitert werden.

Ein weiteres Problem ist, dass einige Naturerscheinungen experimentell nicht zugänglich sind und die Korrektheit einer Theorie nur durch indirekte Nachweise getätigt werden kann. Die Stringtheorie operiert mit der Planck-Masse, die für Massenbeschleuniger viel zu schwer sind, als dass damit experimentiert werden könnte, weil die benötigten Energien aus heutiger Sicht viel zu hoch sind. Die Theorie erlaubt daher viele Dinge, die nicht notwendigerweise in Deckung mit der Natur stehen, allein weil empirische Daten fehlen. Eine Bewertung dieser lebendigen Theoriebildung muss gut abgewogen werden. Es wäre verfehlt, alle Theorien bis auf die als die einzig richtige vorgestellte zu verdammen. In der Geschichte hat sich immer wieder herausgestellt, dass sich im wissenschaftlichen Prozess die »richtige« Theorie durchsetzt, aber viele »falsche« Wege gegangen werden müssen, damit sie erkannt wird.

Eine weitere Methode sind Hypothesen. In den Naturwissenschaften werden Hypothesen aufgestellt, aber nicht bewiesen. Es werden vielmehr alle Spezialfälle ermittelt, für welche die Hypothese Gültigkeit besitzt. Diese Hypothesen müssen manchmal verworfen werden, was umwälzende Auswirkungen nach sich zieht. Ein Beispiel ist die ungeschriebene Regel in der Physik, dass kleine Abweichungen in den Voraussetzungen zu kleinen Abweichungen im Ergebnis führen. Eine Kugel der Masse 1001g wird nicht wesentlich stärker von der Erde angezogen als eine die 1000g wiegt. Die Chaostheorie hat diese Regel widerlegt. Es wurden natürliche Dynamiken gefunden, die für beliebig kleine Abweichungen beliebig große Abweichungen in endlicher Zeit produzieren. Es stellt sich somit die Frage, inwieweit sich Mathematik auf die Natur anwenden lässt. Warum lassen sich mittels Mathematik Vorhersagen über zukünftige Ereignisse machen, obwohl der Zusammenhang zwischen Mathematik und Natur unbeweisbar ist?

Mathematik, Natur und der Mensch

Mathematik lässt sich ohne Naturerkenntnis betreiben, einerseits in anderen Wissenschaften, etwa Wirtschaftswissenschaften, aber auch

als Reine Mathematik, als Anwendung der Mathematik auf sich selbst. Die Mathematik lässt sich also von ihrer kulturellen Bedeutung nicht auf die Rolle als »Sprache der Naturwissenschaft« reduzieren, sondern hat, wie die Musik, Kunst und Sprachwissenschaft ihre eigene Daseinsberechtigung. Mathematik ist in der Natur vorhanden, aber sie wird durch die Anwendung des Menschen expliziert. Wirkt der Mensch aber auf die Natur ein, entsteht Kultur. Wirkt der Mensch auf Mathematik ein und gebraucht sie richtig, so wird immer Mathematik entstehen. Es stellt sich die Frage, inwiefern der Mensch als Transformator das eine verändert, das andere aber invariant lässt. Das Bindeglied zwischen Natur und Mathematik ist der Mensch. Er ist sowohl Teil der Natur als auch Betreiber der Mathematik. Er trägt die Natur in die Mathematik und vice versa.

Die Mathematik wird von Menschen betrieben, deshalb gibt es auch eine Differenzierung in interessante und weniger interessante Probleme. Die mathematische Forschung konzentriert sich auf solche Probleme, die aus der Natur in die Mathematik getragen werden. Probleme der Physik oder neuerdings der Biologie bestimmen die mathematische Forschungsrichtung. Insofern bildet der Mensch die Natur auf die Mathematik ab.

Eine weitere interessante Feststellung ist, dass zur Erzeugung von Mathematik Kognition erforderlich ist. Wie bereits gesehen, liefert die Deduktion keine wirklich neuen Erkenntnisse. Dafür ist trotzdem Denkleistung nötig. Wir sehen also, dass die realen mathematischen Prozesse vom Menschen, dessen Kultur und Geistestätigkeit abhängt. Der Mensch selber wird aber weder für die Mathematik noch für die Natur gebraucht. Natur existiert ohne den Menschen, mathematische Regeln werden ohne menschliche Hilfe befolgt. Dem Menschen wird die Aufgabe zuteil, beide Entitäten wahrzunehmen und zu demonstrieren.

Kulturbildung ließe sich ebenfalls unter diesem Aspekt subsumieren. Der Mensch verändert die Natur und formt Kultur. Die Natur befindet sich in einem Gleichgewichtszustand. Konsequenz ist dieser Zustand unter allen Zuständen derjenige mit der größten Wahrscheinlichkeit, mit der größtmöglichen Entropie. Die Entropie ist ein Maß für die

Unordnung, genauer ein Maß für die Natürlichkeit eines Zustands. Überlässt man menschliche Kultur sich selbst, wird der Zustand maximaler Entropie angestrebt. Da menschliche Kultur unwahrscheinlich und aus diesem Grund niedrige Entropie besitzt, wird sie zerfallen, einen Zustand höherer Entropie annehmen. Häuser werden gebaut, aber sie zerfallen von selbst. Niemals wurde beobachtet, dass aus Schutt ein Haus ohne menschliches Zutun entstanden sei. Der Mensch manipuliert durch sein Kulturschaffen die Wahrscheinlichkeiten.

Die Mathematik ist das Werkzeug zur Beschreibung der Natur, insofern haben wir uns über Galilei nicht hinausbewegt. Denn alternativ könnte man auch, wie in der Prä-Galilei-Ära, sich der gesprochenen Sprache bedienen. Sie ist leichter verständlich, denn naturwissenschaftliche Veröffentlichungen bestehen nicht nur aus Formeln, selbst in der Mathematik ist ein Großteil Text.

Forschung in der Verhaltensbiologie wird nicht a priori in mathematische Termini gefasst. Es stellt sich die Frage, inwieweit es nützlich ist, Naturbeschreibung, also Naturwissenschaft, nur auf mathematisch beschreibbare Phänomene zu konzentrieren. Oft ist das Verständnis für Naturzusammenhänge ohne Mathematik begreifbar. Auch beschreibbare Phänomene werden nicht im strengen Sinn mathematisch, vielmehr mittels mathematischer Symbole unter Anwendung von Notationsmissbrauch zu Papier gebracht.

Die Beziehung Mathematik und Natur kann auch aus einem systemtheoretischen Blickwinkel betrachtet werden. Ausgangspunkt ist die von Niklas Luhmann¹¹ entwickelte Systemtheorie. Die Natur, die Umwelt, ist ein komplexes System, welches aus vielen Subsystemen aufgebaut ist. Eine Abgrenzung zu anderen Systemen ist schwierig, da alles Erfahrbare letztlich als Natur definiert werden kann. Somit ist die Systemdifferenz kaum messbar, daher ist die Systemkomplexität reziprok groß. Das System zu erforschen und zu erfassen bedeutet in natürlicher Weise, die Komplexität des Systems Natur zu reduzieren. Dies geschieht durch Selektion, d.h. es werden nur bestimmte Aspekte des Systems wahrgenommen. Ein romantischer Dichter wird die durch Naturbetrachtung ausgelösten Gefühle auswählen, ein Naturwissen-

¹¹ Luhmann
2001

schaftler den gesetzesmäßigen Ablauf in der Natur, eben die Naturgesetze.

Es greift zu kurz, die Mathematik in diesem Kontext als Subsystem der Natur zu begreifen. Vielmehr ist der Schnitt aus Mathematik und Natur ein nichtleeres Subsystem, welches aus den Naturgesetzen und dem Garant für deren Einhaltung, der Logik, besteht. Die Mathematik als Denksystem bietet dabei die Möglichkeit, die Komplexität des Systems Natur zu reduzieren, indem sie in dem Schnittsystem (Meta-)Regeln erzeugt und Empirie durch Theorie ersetzt. So betrachtet ist die Mathematik zum einen ein hilfreiches Werkzeug zur Komplexitätsreduktion der Natur, zum anderen aber auch selbst Teil der Natur.

Fortschritt in der Naturwissenschaft

Die Naturwissenschaft entwickelt sich nicht von der Mathematik fort, aber es ist denkenswert, ob man eine ebenso mächtige Beschreibungssprache wie die Mathematik findet. Naturwissenschaft wird von Menschen gemacht. Das Wissen, was dem Menschen zur Verfügung steht, bestimmt er selbst. Der Mensch bestimmt die Richtung der Forschung, deshalb sind die Naturwissenschaften dem Zeitgeist und Strömungen ausgesetzt. Es gibt einerseits prinzipielle Schranken der Erkenntnis, praktische Schranken und Schranken, die man sich selber auferlegt. Zu den prinzipiellen Schranken gehören die, die von methodischen Beschränkungen der Wissenschaft herrühren. Ein nicht reproduzierbares Experiment trägt nichts zum Wissen bei. Eine Lockerung der Methode würde nicht das Ergebnis liefern, welches wir uns wünschen und das unseren Vorstellungen entspricht. Die praktischen Schranken bestehen in der Begrenztheit der Ressourcen und Möglichkeiten des Menschen. Ein Experiment mit mehreren Sonnemassen ist unmöglich. Es kann aber sein, dass Grenzen irgendwann wegfallen, allerdings wird es immer praktische Grenzen geben, die bleiben, obwohl wir uns deren Überwindung vorstellen können. Das ist mit der praktischen Grenze in Abgrenzung zur prinzipiellen Grenze gemeint. Schließlich existieren Grenzen, die dem Menschen zuzurechnen sind. Jeder Mensch hat unterschiedliche Motive und Interessen, sein Vermögen ist begrenzt. Entscheidet er sich für etwas, muss er andere Tätigkeiten vernachlässigen. Mit jeder Festlegung

legt der Mensch sich Grenzen auf. Der Mensch ist nicht allein auf der Welt, sondern in ein soziales Umfeld eingebunden. Dieses richtet Erwartungen an ihn, die er erfüllen sollte, ansonsten drohen Sanktionen. Gleichzeitig gibt das soziale Netz erwünschte Beispiele vor, die belohnt werden. Dieser Mechanismus beschränkt die Forschungstätigkeit ebenfalls.

Quintessenz

Isaak Newtons Werke waren ein Meilenstein in der Geschichte der Naturwissenschaft. Neuere Theorien zeigen, wie wandelbar und erweiterungsfähig die Naturwissenschaft sein muss, um neuen Phänomenen zu begegnen. Mathematik und Natur sind eng miteinander verzahnt. Die Natur ist mehr als die Realisierung der Mathematik, die Mathematik dient der Beschreibung der Natur. Beide Entitäten besitzen Aspekte, in welche die jeweils andere nicht vorzudringen vermag. In der Natur wird es immer Rätsel geben, die erst mathematisch erfasst werden müssen oder auf diese Weise nicht erfassbar sind. Die Mathematik zeigt in der Reinen Mathematik und in Nicht-Naturwissenschaften ihre Anwendbarkeit. Lücken in der Beziehung zwischen Mathematik und Natur wurden durch Kant zum Teil geschlossen. Es zeigt sich aber, dass Mathematik und Natur zusammen gehören, wenn sie auch verschieden sind.

Literatur

- Brecht, Bertolt: *Leben des Galilei*. Frankfurt/M. 1997.
- Cantor, Georg: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Mathematische Annalen, Band 21, 1883.
- Gadamer, Hans-Georg: *Idee und Wirklichkeit*. Heidelberg 1974.
- Galilei, Galileo: *Il saggiatore*. 1623.
- Kant, Immanuel: *Werke in zwölf Bänden*. Herausgegeben von Wilhelm Weischedel. Bd. 3: Kritik der reinen Vernunft. Frankfurt/M. 1977a.
- Ders.: *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. Riga 1786.
- [Kant, Immanuel: Werke in zwölf Bänden. Herausgegeben von Wilhelm Weischedel. Bd. 9. Frankfurt/M. 1977b, 9-135]
- Kuznecov, Boris G.: *Von Galilei bis Einstein*. Berlin 1970.

- Luhmann, Niklas: *Soziale Systeme. Grundriß einer allgemeinen Theorie*. Frankfurt/M. 2001.
- Mauthner, Fritz: Mathematische Naturerklärung. In: *Wörterbuch der Philosophie*. München/Leipzig 1910.
- Platon: Timaios. In: ders.: *Sämtliche Werke*. Essen o. J.
- Schäfer, Lothar: Natur. In: Martens, Ekkehard; Schnädelbach, Herbert (Hg.): *Philosophie*. Hamburg 1985, 467-507.
- Schmutzer, Ernst; Schütz, Wilhelm: *Galileo Galilei*. Leipzig 1976.
- Schulz, Dietrich J.: *Das Problem der Materie in Platons Timaios*. Bonn 1966.